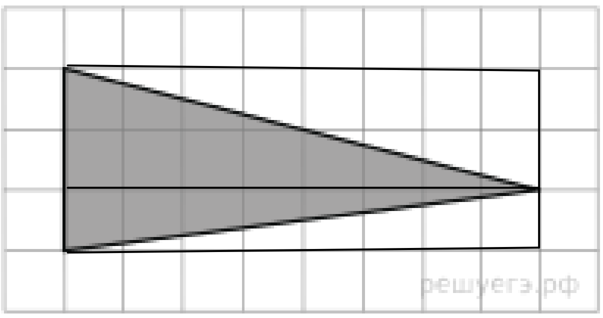
Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
4 класс

1. Ответ: **12+43+5=60 24+31+5=60 12+45+3=60 24+35+1=60 13+42+5=60 25+31+4=60 13+45+2=60 (**1 способ- 1 балл…, 7 способов-7 баллов).
2. Ответ: **15 ям**. Шесть землекопов за 2 часа выкопают $2 \cdot 3 = 6$ ям. Шесть землекопов за 4 часа выкопают 4•3 = 12 ям. Шесть землекопов за 1 час выкопают 3 ямы. А за 5 часов они выкопают 12+3=15 ям. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **1 корзина-27 орехов, 2 корзина-25 орехов, 3 корзина-18 орехов, 4 корзина-16 орехов, 5 корзина-14 орехов.**
   Решение:
   1) 100 – 52 = 48 (ор.) – в 3, 4 и 5-ой
   2) 48 – 34 = 14 (ор.) – в 5-й
   3) 30 – 14 = 16 (ор.) – в 4-й.
   4) 34 – 16 = 18 (ор.) – в 3-й
   5) 43 – 18 = 25 (ор.) – во 2-й
   6) 52 – 25 = 27 (ор.) – в 1-й
4. Ответ: **скорость поезда 21 м/с, длина поезда 147 м**. Решение. На 378 м поезду потребовалось 25 – 7 = 18 секунд. Следовательно, его скорость равна 378 : 18 = 21 м/с, а длина 21•7 = 147 м.
5. Ответ: **12 см^2.**
   Площадь треугольника равна сумме двух половинок прямоугольников. Поэтому

$$S = 2 \cdot 8 : 2 + 1 \cdot 8 : 2 = 12$$

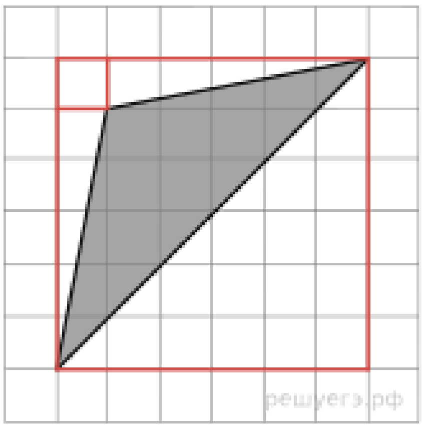


Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
5 класс

1. Ответ: **107 – 84 = 23 и 109 – 86 = 23.** (1 способ-3 балла, 2 способа-7 баллов).
2. Ответ: **10 ям**. Шесть землекопов за 3 часа выкопают 2•3 = 6 ям. Шесть землекопов за 6 часов выкопают 6•2 = 12 ям. Шесть землекопов за 1 час выкопают 2 ямы. А за 5 часов они выкопают 10 ям. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **4 руб., 8 руб., 5 руб.** Решение:
   1) 40 – 32 = 8 (руб.) – стоят два яблока или один персик;
   2) 8:2 = 4 (руб.) – стоит одно яблоко;
   3) 4+8 = 12 (руб.) – стоят одно яблоко и персик;
   4)32 – 12 = 20 (руб.) – стоят четыре груши;
   5) 20:4 = 5 (руб.) – стоит груша.
4. Ответ: **172.** Решение. Последняя страница выпавшего куска может иметь номер, обозначенный чётным числом, так как выпасть может целое число листов. Таким числом при данном условии может быть только 314. Числа же 341, 431 и 413 нечётные. Тогда количество страниц выпавшего куска есть 314 – 142 = 172.
5. Ответ: **12 см^2 .** Площадь треугольника равна разности площади большого квадрата, маленького квадрата и трех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного треугольника. Поэтому

$$S = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 12$$

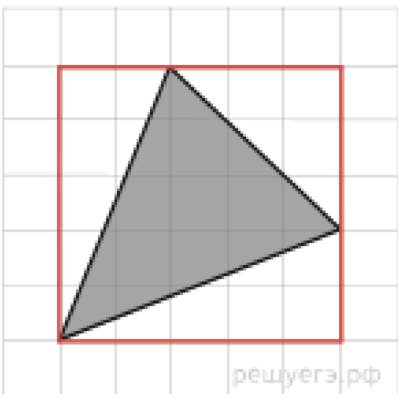


Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
6 класс

1. Ответ: 984 + 72 = 1056 982 + 74 = 1056 974 + 82 = 1056 972 + 84 = 1056. (1 способ-1 балл, 2 способа-3 балла, 3 способа-5 баллов, 4 способа-7 баллов).
2. Ответ: **4 часа.** Решение. Пусть во время, когда один из рабочих роет основную яму, двое остальных роют дополнительные ямы. Тогда к концу работы над основной ямой будут вырыты еще $3 \cdot 0,5 = 1,5$ дополнительных ям. Таким образом, когда все работают одновременно, они за тоже время выроют 2,5 ямы. Значит вместе они выроют яму быстрее в 2,5 раза, то есть за 10 : 2, 5 = 4 часа. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **на 6**. Решение: Пусть a школьников получили тройку, b школьников – четверку, c школьников – пятёрку. Из условия задачи следует, что a + b + c = 25 и 3a + 4b + 5c = 106.Умножим обе части первого уравнения на 4: 4a + 4b + 4c = 100. Теперь вычтем из второго уравнения полученное, тогда c – a = 6.
4. Ответ: **214.** Для нумерации первых 9-ти страниц учебника использованы 9 цифр. Следующие 90 страниц занумерованы двузначными числами. Для этого потребовалось 90 • 2 = 180 цифр. Остаток, приходящийся на трехзначные номера, составляет: 534 - (180+9) = 345 цифр. Из этих цифр составлены 345:3 = 115 трехзначных номеров. Итого число страниц в учебнике равно 9 + 90 + 115 = 214.
5. Ответ: **10,5 см^2.**
Площадь треугольника равна разности площади прямоугольника и трех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного треугольника. Поэтому

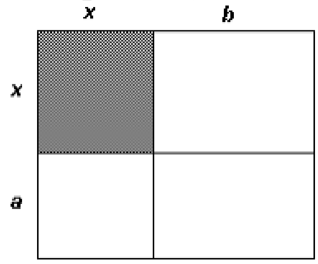
$$S = 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10,5$$



Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
7 класс

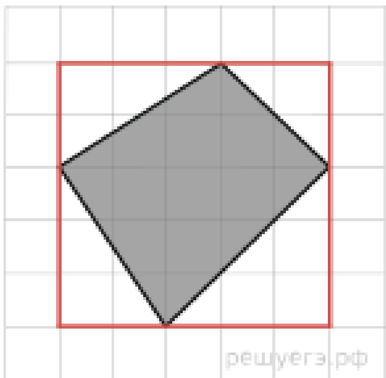
1. Ответ: $2019 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 : 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 + 1$
2. Ответ: **4 часа.** Решение. Пусть во время, когда один из рабочих роет основную яму, двое остальных роют дополнительные ямы. Тогда к концу работы над основной ямой будут вырыты еще 3•0,5 = 1,5 дополнительных ям. Таким образом, когда все работают одновременно, они за тоже время выроют 2,5 ямы. Значит вместе они выроют яму быстрее в 2,5 раза, то есть за 10 : 2, 5 = 4 часа. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **160 грамм.** Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нем – (1 – x) кг. Таким образом, стоимость костей составляет 15x рублей, а стоимость говядины – 90(1 – x) рублей. Исходя из условия, составим уравнение: 15x + 90(1 – x) = 78. Решив уравнение, получим, что x = 0,16 кг.
4. Ответ: **80 см^2.** Введем обозначения так, как показано на рисунке. Выразим половины периметров прямоугольников, указанных в условии: $a + x = 8$ и $b + x = 10$. Тогда площадь исходного прямоугольника равна $(a + x)(b + x) = 80$ (см^2).



5. Ответ: **12,5 см^2.**

Площадь четырехугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырехугольника. Поэтому

$$S = 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 12,5$$

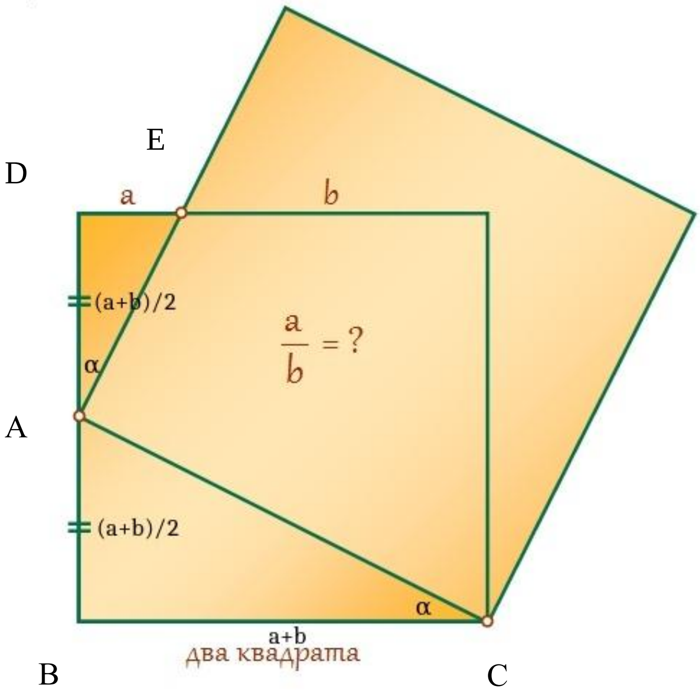


Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
8 класс

1. Ответ: **503,504,505,506.** Решение. Пусть x-первое число последовательности x+(x+1)+…+(x+n)=2018. x(n+1)+n(n+1)/2=2018 Получим уравнение (n+1)(2x+n)= 4*1009 n+1=4 n=3. Значит этих чисел 4. Составим уравнение 2x+3 =1009, откуда получим x=503. Найдем остальные числа 504,505,506.
2. Ответ: **10 часов.** Пусть заказ – это объем работы равный 1. Тогда производительность (скорость выполнения заказа) каждого рабочего равна $\frac{1}{16}$ заказ/час. За 4 часа работы первый рабочий выполнит: $4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ часть заказа. После того, когда к нему присоединился второй рабочий, то им вместе осталось выполнить: $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ часть заказа. Найдем время совместной работы двух рабочих, для этого весь объем совместной работы разделим на совместную производительность: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=6$
   Тогда на выполнение всего заказа обоим рабочим потребуется 4 + 6 = 10часов.
   (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **25 лет или 7 лет.** Решение. Необходимо рассмотреть 2 случая.
   1 случай. Пусть человек родился в 19mn году, тогда 2012 − 19mn= 1 + 9 + m + n
   2012 − 1900 − m − n = 10 + m + n
   102 = 11m + 2n
   m = 8, n = 7, значит 1987 год, ему 25 лет.
   2 случай. Пусть человек родился в 200n году, тогда 2012 − 200n = 2 + n
   2012 − 2000 − n = 2 + n
   12 − 2 = 2n
   n = 5, значит 2005 год, ему 7 лет
4. Ответ: $\boldsymbol{m = n = 14; m = 56, n = 8; m = 8, n = 56.}$
   Решение. Из условия задачи следует, что $m > 7$ и $n > 7$. Так как переменные входят в уравнение симметрично, то достаточно найти пары (m; n), в которых $m \geq n$.
   Выразив m из данного уравнения, получим: $m=\frac{7n}{n-7}$. Тогда $\frac{7n}{n-7}\geq n$, то есть $n \leq 14$.
   Таким образом, достаточно проверить n = 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. Перебором получим, что m принимает натуральные значения в двух случаях: при $n = 8$ $m = 56$; при $n = 14$ $m = 14$.

5. Ответ: $\frac{1}{3}$. Решение. Рассмотрим треугольники ABC и ADE. Они подобны по первому признаку. Составим пропорцию и вычислим отношение.



$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{a+b} \Rightarrow \frac{2a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$4a = a + b \Rightarrow 3a = b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение

9 класс

1. Ответ: **1) 1009 и 1010, 2) 334,335,336,337,338 и 339 3) 672,673 и 674.** Решение. Пусть x-первое число последовательности x+(x+1)+…+(x+n)=2019. x(n+1)+n(n+1)/2=2019. Получим уравнение (n+1)(2x+n)=2*2019=6*673=3*1346 отсюда следует, что x - трехзначное или четырехзначное число.

1) n+1=2 n=1. Таким образом, этих чисел 2. Подставим и решим уравнение 2x+1=2019, откуда получим x=1009. Второе число 1010.
2) n+1=6 n=5. Таким образом, этих чисел 6. Подставим и решим уравнение 2x+5=673, откуда получим x=334. Найдем остальные числа 335,336,337,338, 339.
3) n+1=3 n=2. Таким образом, этих чисел 3. Подставим и решим уравнение 2x+2=1346, откуда получим x=672. Найдем остальные числа 673,674.

(1 способ -3 балла, 2 способа-5 баллов, 3 способа- 7 баллов)

2. Ответ: **8 часов.** Пусть заказ – это объем работы равный **1**. Тогда производительность (скорость выполнения заказа) первого рабочего равна $\frac{1}{16}$ заказ/час, второго рабочего равна $\frac{1}{8}$ заказ/час. За 4 часа работы первый рабочий выполнит: $4\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ часть заказа. После того, когда к нему присоединился второй рабочий, то им вместе осталось выполнить: $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ часть заказа. Найдем время совместной работы двух рабочих, для этого весь объем совместной работы разделим на совместную производительность: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{8}}=4$

Тогда на выполнение всего заказа обоим рабочим потребуется 4 + 4 = 8 часов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: $\boldsymbol{x = -1}$**.** Число слева целое, а, следовательно, и справа стоит целое число, то есть $\{x\} = 0$. Значит, x – целое число, поэтому уравнение можно переписать в виде $x^3 + x^2 + x = -1$, или $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$. Тогда x = –1.

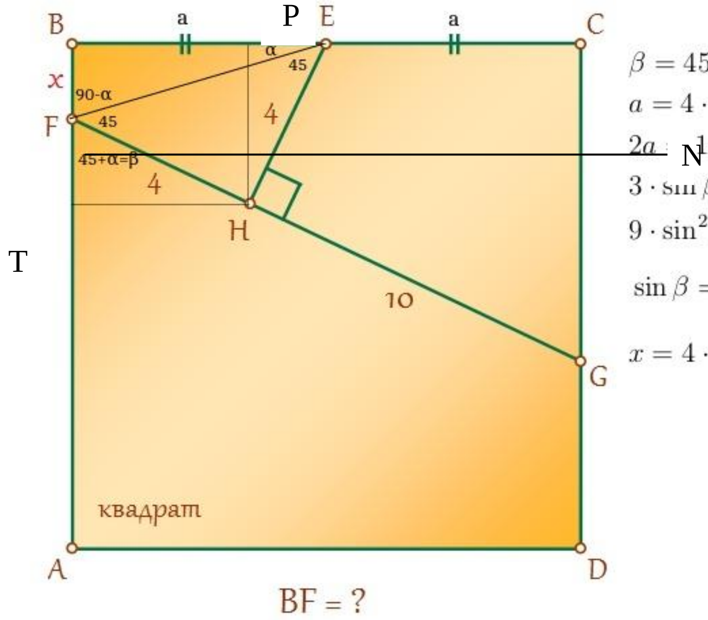
4. Ответ: **3**. Решение. Заданная сумма имеет смысл, если $a\ge 1$, $b\ge 1$ и $c\ge 1$. Пусть $x=\sqrt{a-1}$, $y=\sqrt{b-1}$, $z=\sqrt{c-1}$. Тогда $x^2+y^2+z^2=3$. Найдем наибольшее значение суммы $x+y+z$, учитывая, что каждое слагаемое принимает неотрицательные значения. Для этого оценим эту сумму «сверху».

Первый способ. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным: $\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = 1$, откуда $x+y+z \le 3$.

Второй способ. Пусть $x+y+z=d$. Тогда, используя неравенство $m^2 + n^2 \ge 2mn$, получим: $d^2=(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \le 3x^2+3y^2+3z^2=9$, откуда $d \le 3$.

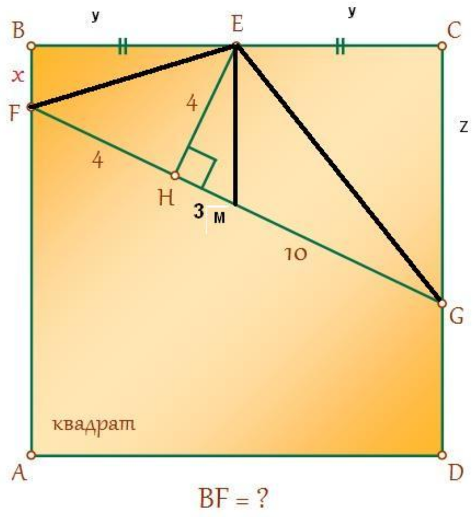
Значение 3 достигается, при $x=y=z=1$, что соответствует $a=b=c=2$.

5. Ответ:**0,8**. Решение. **1 способ.** BF = x. Проведем FE. Треугольник FEH-равнобедренный. Из точки H проведем перпендикуляры HT и HP. Обозначим угол BEF=α, тогда угол BFE = $90^\circ - \alpha$, $\angle FTH = 45^\circ + \alpha = \beta$. $BE = BP + PE = TH + PE = 4\sin\beta + 4\cos\beta$. Из треугольника TPN $2a = 14\sin\beta$ $x = BT - FT = 4\sin\beta - 4\cos\beta$



$$\beta = 45^\circ + \alpha$$
$$a = 4\cdot\cos\beta + 4\cdot\sin\beta$$
$$2a = 14\cdot\sin\beta = 8\cdot\cos\beta + 8\cdot\sin\beta$$
$$3\cdot\sin\beta = 4\cdot\cos\beta$$
$$9\cdot\sin^2\beta = 16\cdot\cos^2\beta = 16\cdot\left(1-\sin^2\beta\right)$$
$$\sin\beta = \frac{4}{5}$$
$$x = 4\cdot\sin\beta - 4\cdot\cos\beta = \sin\beta = \frac{4}{5}$$

2 способ. BE = y, GC=z. Проведем медиану EM, EM=5 (по теореме Пифагора), тогда EM-средняя линия трапеции BFGC x+z=2*EM=10. Далее $x^2+y^2=4^2+4^2=32$, $y^2+z^2=4^2+10^2=116$; $z^2-x^2=84$ или $(z-x)(z+x)=84$; $(z-x)*10=84$ => $z-x=8,4$ Отсюда $2x=1,6$ и $x=0,8$.



Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
10 класс

1. Ответ: возможны различные способы решения

а) Например, $2019 = 13^2 + 25^2 + 35^2$ (верное решение 2 балла)

б) Например, $2019 = 13^2 + 20^2 + 15^2 + 35^2$ (верное решение 2 балла).

в) Например, $2019 = 15^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 24^2$ (верное решение 3 балла).

2. Ответ: **16 дней.** Решение:

Пусть производительность каждого из рабочих равна $1/x$ дома в день, и пусть в новом составе бригады достраивали дома y дней. Тогда за первые 7 дней работы бригадами в 16 и 25 человек было построено $16 \cdot 7/x$ и $25 \cdot 7/x$ частей домов, а за следующие y дней бригадами в 24 человека и 17 человек были построены оставшиеся $24 \cdot y/x$ и $17 \cdot y/x$ части домов. Поскольку в результате были целиком построены два дома, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{16 \cdot 7}{x} + \dfrac{24y}{x} = 1, \\ \dfrac{25 \cdot 7}{x} + \dfrac{17y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 112 + 24y = x, \\ 175 + 17y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 112 + 24y = 175 + 17y, \\ x = 175 + 17y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9, \\ x = 328. \end{cases}$$

Значит, в новом составе бригады работали 9 дней. Таким образом, потребовалось 7 + 9 = 16 дней на выполнений заказов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: 0, –1; $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$; $-\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Решение. Пусть $[x] = a$, $\{x\} = d$, тогда данное уравнение примет вид:

$(a+d)^2 + d(a+d) + a = 0 \Leftrightarrow a^2 + (3d+1)a + 2d^2 = 0$.

Так как $0 \le d < 1$, то $0 \le 3d + 1 < 4$. Следовательно, полученное равенство может выполняться только в случае, когда $a \le 0$.

1) Если $a = 0$, то $d = 0$, то есть $x = 0$ – корень исходного уравнения.

2) Пусть $a < 0$, тогда необходимым условием для выполнения равенства является: $a^2 + (3d+1)a \le 0 \Leftrightarrow a(a + 3d + 1) \le 0$. В этом случае: $a \ge -(3d+1) > -4$.

Так как a – целое число, то возможны только три значения a: –1; –2; –3.

Если $a = -1$, то $2d^2 - 3d = 0$, то есть $d = 0$. Тогда $x = -1$ – корень исходного уравнения.

Если $a = -2$, то $2d^2 - 6d + 2 = 0 \Leftrightarrow d^2 - 3d + 1 = 0 \Leftrightarrow d = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Так как $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, а $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, то $x = -2 + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ – корень исходного уравнения.

Если $a = -3$, то $2d^2 - 9d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$. Так как $\frac{9 + \sqrt{33}}{4} > 1$, а $0 < \frac{9 - \sqrt{33}}{4} < 1$, то $x = -3 + \frac{9 - \sqrt{33}}{4} = -\frac{3 + \sqrt{33}}{4}$ – корень исходного уравнения.

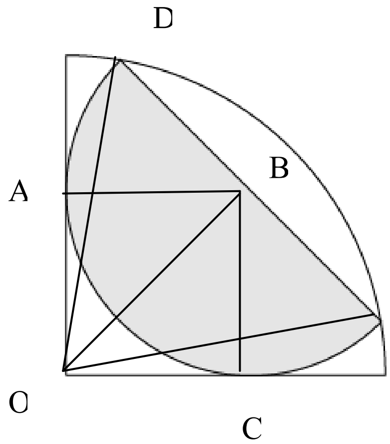
4. Ответ: $\frac{2}{3}$. Решение. Пусть x - радиус полукруга, тогда по свойству касательных образуется квадрат ABCO со стороной x.

Из треугольника ODB получим $x^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = R^2 \quad x^2 = \frac{R^2}{3}$

$S_1 = \frac{\pi x^2}{2} = \frac{\pi R^2}{6}$ площадь полукруга

$S_2 = \frac{\pi R^2}{4}$ площадь четверти круга

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{6} : \frac{\pi R^2}{4} = \frac{2}{3}$



5. Доказательство: Пусть диагональ AC_1 образует рёбрами AB, AD и AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 || BB_1 || CC_1 || DD_1$) углы α , β и γ соответственно. Обозначим $AB = x$, $AD = y$, $AA_1 = z$, $AC_1 = d$.
Из прямоугольных треугольников ABC_1 , ADC_1 и AA_1C_1 находим, что

$\cos\alpha = \cos\angle BAC_1 = \frac{AB}{AC_1} = \frac{x}{d}$

$\cos\beta = \cos\angle DAC_1 = \frac{AD}{AC_1} = \frac{y}{d}$

$\cos\gamma = \cos\angle A_1AC_1 = \frac{AA_1}{AC_1} = \frac{z}{d}$

Следовательно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 + \left(\frac{z}{d}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$

Школьный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
11 класс

1. Ответ: Необходимо применить формулу $2019^2 = x^2 + y^2 + z^2$

например, $2019 = 43^2 + 13^2 + 1^2$, по формуле $2019 = a^2 + b^2 + c^2$

$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = \left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$**,** тогда получим следующие линейные размеры 1679,1118, 86 см. Ответ зависит от представления 2019 в виде суммы трех квадратов.

2. Ответ: **16 дней.** Решение:

Пусть производительность каждого из рабочих равна $1/x$ дома в день, и пусть в новом составе бригады достраивали дома y дней. Тогда за первые 7 дней работы бригадами в 16 и 25 человек было построено $16 \cdot 7/x$ и $25 \cdot 7/x$ частей домов, а за следующие y дней бригадами в 24 человека и 17 человек были построены оставшиеся $24 \cdot y/x$ и $17 \cdot y/x$ части домов. Поскольку в результате были целиком построены два дома, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{16\cdot 7}{x} + \dfrac{24y}{x} = 1, \\ \dfrac{25\cdot 7}{x} + \dfrac{17y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 112 + 24y = x, \\ 175 + 17y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 112 + 24y = 175 + 17y, \\ x = 175 + 17y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9, \\ x = 328. \end{cases}$$

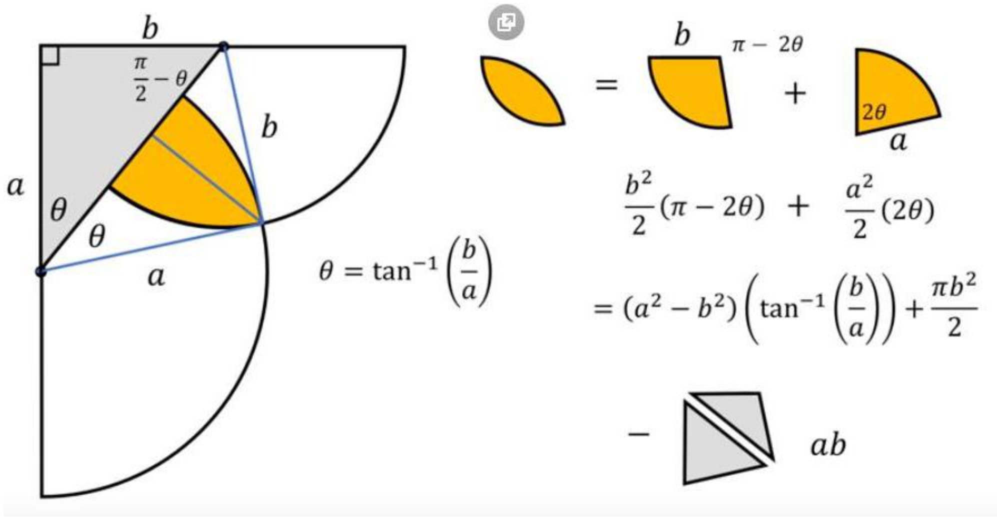
Значит, в новом составе бригады работали 9 дней. Таким образом, потребовалось 7 + 9 = 16 дней на выполнений заказов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

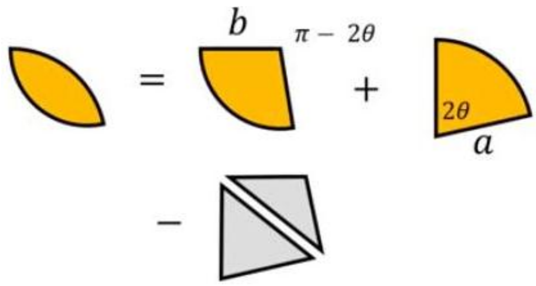
3. Ответ:**110 решений.** Пусть $x = 11n + r$, где $n \ge 0$, $0 \le r \le 10$. Тогда $[x/11] = n$, $n + 1 = [x/10] = n + [(n+r)/10]$, то есть $10 \le n + r < 20$, $10 - r \le n \le 19 - r$. Для каждого r от 0 до 10 получаем 10 решений. 10*11=110 решений.

4. Ответ: $75 arctg \dfrac{1}{2} - 25 \approx 9{,}77$.

Решение.

Пусть a и b - радиусы полукругов, тогда выведем формулу для нахождения фигуры из круговых сегментов в радианах $S = \left(a^2 - b^2\right) arctg \dfrac{b}{a} - \dfrac{\pi b^2}{2} - ab$

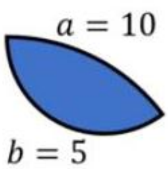




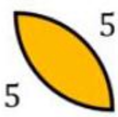
$$= (a^2 - b^2)\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + \frac{\pi b^2}{2} - ab$$

$$S = \left(a^2 - b^2\right) arctg\,\frac{b}{a} - \frac{\pi b^2}{2} - ab$$

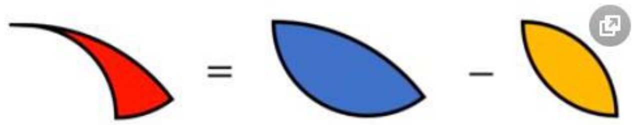
$$(a^2 - b^2)\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + \frac{\pi b^2}{2} - ab$$



$$(10^2 - 5^2)\left(\tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right)\right) + \frac{\pi(5)^2}{2} - (10)(5) \quad = 75\tan^{-1}(0.5) + 12.5\pi - 50$$



$$(5^2 - 5^2)\left(\tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) + \frac{\pi(5)^2}{2} - (5)(5) \quad = (12.5\pi - 25)$$



$$= (a^2 - b^2)\left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) + \frac{\pi b^2}{2} - ab$$

$$= 75\tan^{-1}(0.5) + 12.5\pi - 50 - (12.5\pi - 25)$$

$$\boxed{= 75\tan^{-1}(0.5) - 25 \ \approx 9.77}$$

5. Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}\right)^2 = 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^4$.

Решение.

1 случай. Пусть сфера радиуса r с центром O касается внутренним образом данных сфер с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4. Тогда O – центр правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$, ребро которого равно 2.

Радиус R сферы, описанной около правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$, равен $\frac{3}{4}$ его высоты, т.е. $R = \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ Следовательно, $r = R + 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + 1$.

2 случай. Если сфера радиуса r с центром O касается данных сфер внешним образом, то аналогично находим, что

$r = R - 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$.